

**Dorin Linț
Maria Zaharia**

**Maranda Linț
Dan Zaharia**

MATEMATICĂ



**MANUAL PENTRU
CLASA A VI-A**



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

CUPRINS

1. MULȚIMI

1.1. Descriere. Notatii. Reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime	8
1.2. Relații între mulțimi	11
1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	14
1.4. Operații cu mulțimi	16
1.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	19
1.6. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun	22
1.7. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale	26

2. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

2.1. Rapoarte	32
2.2. Proporții	37
2.3. Șir de rapoarte egale. Mărimi proporționale	41
2.4. Regula de trei simplă	47
2.5. Elemente de organizare a datelor	50
2.6. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice	53
2.7. Probabilități	55
2.8. Raportul și proporția în viața cotidiană	57

3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Mulțimea numerelor întregi.	
Opusul unui număr întreg. Reprezentare, comparare și ordonare	62
3.2. Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți	68
3.3. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți	74
3.4. Împărțirea numerelor întregi, când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	78
3.5. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri	81
3.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	85
3.7. Ecuații în mulțimea numerelor întregi	87
3.8. Inecuații în mulțimea numerelor întregi	90
3.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor	93

4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

4.1. Noțiuni recapitulative	98
4.2. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Forme de scriere a numerelor raționale	100
4.3. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.	
Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	104

4.4. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți	108
4.5. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți	115
4.6. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri	121
4.7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	125
4.8. Ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	127

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

5.1. Recapitulare și completări	136
5.2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor	140
5.3. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor	143
5.4. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente.	148
5.5. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	151
5.6. Drepte paralele	154
5.7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă	158
5.8. Axioma paralelelor	160
5.9. Criterii de paralelism.....	165
5.10. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	170
5.11. Drepte perpendiculare în plan. Oblice.....	172
5.12. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	176
5.13. Distanța de la un punct la o dreaptă	178
5.14. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă.....	181
5.15. Cerc. Definiție. Construcție. Elemente în cerc.....	187
5.16. Unghi la centru. Măsuri	192
5.17. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.....	195

6 TRIUNGHIUL

6.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetru	204
6.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi	209
6.3 Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului.....	213
6.4. Linii importante într-un triunghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	216
6.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi	220
6.6. Linii importante în triunghi. Înălțimile unui triunghi	223
6.7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi.....	226
6.8. Congruența triunghiurilor. Criterii de congruență	230
6.9. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență.....	235
6.10. Metoda triunghiurilor congruente	239
6.11. Proprietățile triunghiului isoscel. Proprietățile triunghiului echilateral.....	243
6.12. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice	248

1.1. Descriere. Notății. Reprezentări.

Relația dintre un element și o mulțime



Rezolvăm și descoperim

1. Determinați numerele naturale x știind că $x+11 \leq 15$.

Rezolvare. Dacă x este un număr natural, atunci $x+11$ este de asemenea număr natural. Observând că $x+11 \geq 11$ și ținând cont de enunț, rezultă că $x+11$ este egal cu unul dintre numerele: 11, 12, 13, 14 sau 15. Prin urmare $x+11=11$ sau $x+11=12$ sau $x+11=13$ sau $x+11=14$ sau $x+11=15$. Din aceste egalități deducem că x este egal cu unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3 sau 4.



Descoperim

Rezolvarea problemei arată că există mai multe numere naturale x care au proprietatea $x+11 \leq 15$. Ele sunt *distincte* și *bine determinate* și, împreună, formează o *colecție*, o *grămadă* sau o *mulțime* de numere. Fiecare dintre aceste numere se numește *element al mulțimii*. Vom spune că *mulțimea numerelor naturale x care au proprietate $x+11 \leq 15$ este egală cu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$* . Pentru a ne referi ușor la această mulțime, o putem nota cu o literă mare, de exemplu cu A și vom scrie $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Se observă că mulțimea A , este definită de elementele ei scrise între acolade.

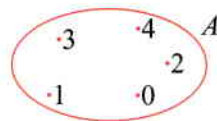
Este 3 element al mulțimii A ? Da, pentru că este scris între acolade.

Este 7 element al mulțimii A ? Nu, pentru că nu este scris între acolade.

Expresia „este element al mulțimii” este înlocuită cu expresia sinonimă „aparține mulțimii”, iar expresia „nu este element al mulțimii” este înlocuită cu expresia sinonimă „nu aparține mulțimii”. Pentru „aparține” se folosește simbolul $\in$, iar pentru „nu aparține” se folosește simbolul $\notin$. Astfel, se scrie $3 \in A$ și se citește „3 aparține mulțimii A ”; se scrie $5 \notin A$ și se citește „5 nu aparține mulțimii A ”.

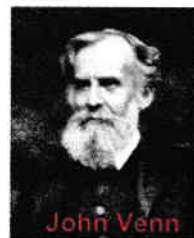
Putem defini mulțimea A enunțând *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii* (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu este din mulțime): $A = \{x | x \text{ este număr natural și } x+11 \leq 15\}$. În acest caz: $3 \in A$ pentru că 3 are *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii*, adică 3 este număr natural și $3+11 \leq 15$. $5 \notin A$ pentru că 5 nu are *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii* deoarece 5 este număr natural, dar $5+11 \geq 15$. Prin urmare: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sau $A = \{x | x \text{ este număr natural și } x+11 \leq 15\}$.

Mulțimea A poate fi ilustrată desenând o linie curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (*diagramă Venn-Euler*). Cele trei forme de definire a mulțimii A se numesc: *explicită*, *implicită*, cu ajutorul *diagramei Venn-Euler*.



Istorie

Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor este foarte veche. Matematicianul Leonard Euler (1707 – 1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul John Venn (1834 – 1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătățiri utile. Pentru aceasta, diagramele reprezentând mulțimi le numim *diagrame Venn-Euler*.



Rezumăm cunoștințele

Mulțimea este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite elementele mulțimii. Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici.

Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi „ x aparține lui A ”.
Dacă x nu este un element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „ x nu aparține lui A ”.

O mulțime poate fi dată în trei moduri:

1) **explicit**, numind fiecare element al mulțimii; mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale.

2) **cu ajutorul diagramei Venn-Euler**; mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare.

3) **implicit**, enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu aparține mulțimii).

O mulțime numerică este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.

O mulțime nenumerică este o mulțime care nu este mulțime numerică.

Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\emptyset$ și se numește **mulțimea vidă**.



Aplicăm cunoștințele

1. Fie M mulțimea cifrelor pare.

a) Completați propoziția care urmează: „Cifrele pare sunt: ...”

b) Scrieți mulțimea M :

• numind fiecare element al mulțimii;

• cu ajutorul diagramei Venn-Euler.

c) Dacă $x \in M$, ce proprietate are x ?

d) Scrieți mulțimea M enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii.

e) Copiați și înlocuiți caseta alăturată cu (A) dacă afirmația este adevărată și cu (F) dacă afirmația este falsă:

$$2 \in M \quad \blacksquare$$

$$1 \notin M \quad \blacksquare$$

$$4 \notin M \quad \blacksquare$$

$$7 \in M \quad \blacksquare$$

2. La o oră de geografie profesorul explică: „Vârful Moldoveanu este vârful muntos cel mai înalt din România, situat în Masivul Făgăraș, județul Argeș. Altitudinea sa este de două mii cinci sute și ceva metri”. Mihai, un elev foarte bun la matematică, notează pe caietul său: „altitudine Vârful Moldoveanu: $25xy$ m”. În pauză, Mihai află de la Alexandra, care este foarte bună la geografie, că altitudinea Vârfului Moldoveanu este de 2 544 m.

a) Scrieți mulțimea A ale cărei elemente sunt simbolurile numerice și literale folosite de Mihai pentru a scrie altitudinea Vârfului Moldoveanu.

b) Scrieți mulțimea B ale cărei elemente sunt cifrele folosite pentru a scrie numărul 2 544.

c) Una dintre mulțimile A și B este numerică, iar cealaltă este nenumerică. Precizați care este mulțimea numerică și care este mulțimea nenumerică.

3. O echipă de 15 copii este formată din fete și băieți. Știind că x este număr natural și $\frac{1}{x}$ din numărul de

copii ai echipei sunt fete, iar echipa are cel puțin o fată și cel puțin un băiat:

a) aflați numărul fetelor din echipă;

b) scrieți explicit mulțimea $M = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \text{ este numărul fetelor din echipă} \right\}$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x \text{ număr natural impar și } 5 < x < 7\}$.

a) Câte elemente are mulțimea?

b) Mulțimea este denumită cu litera A . Folosiți în locul literei A simbolul potrivit și redenumiți mulțimea.

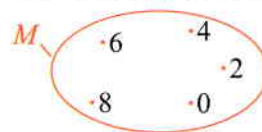
1. a) Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8. b) $M = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) Dacă $x \in M$ atunci x are proprietatea x este cifră pară.

d) $M = \{x | x \text{ este cifră pară}\}$.

e) $2 \in M(A)$; $1 \notin M(A)$; $4 \notin M(F)$; $7 \in M(F)$.

Diagrama Venn-Euler a lui M



2. a) $A = \{2, 5, x, y\}$; b) $A = \{2, 4, 5\}$; c) Mulțimea A este *mulțime nenumerică* (elementele ei sunt simboluri numerice și literale), iar mulțimea B este *mulțime numerică* (elementele ei sunt numere).

3. a) Cum $\frac{1}{x}$ din 15 este egal cu $\frac{15}{x}$, rezultă că numărul fetelor este $\frac{15}{x}$. Prin urmare 15 se împarte exact la numărul natural nenul x . Altfel spus, 15 este divizibil cu x , deci x este egal cu unul dintre numerele 1, 3, 5 sau 15. Rezultă că numărul fetelor poate fi egal cu: $\frac{15}{1}$ sau $\frac{15}{3}$ sau $\frac{15}{5}$ sau $\frac{15}{15}$, adică 5, sau 3,

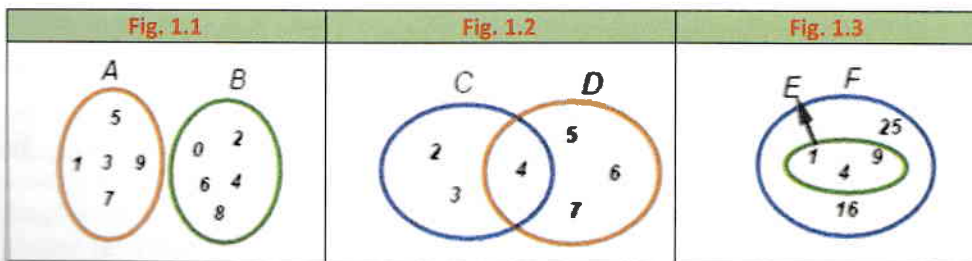
sau 1. b) $M = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$.

4. a) Nu există niciun număr natural impar între 5 și 7, deci A este mulțimea vidă.

b) Se scrie $A = \{x | x \text{ număr natural impar și } 5 < x < 7\} = \emptyset$.

Activități de învățare

- Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din care sunt formate cuvintele:
a) număr; b) elev; c) profesor; d) vacanță.
Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul literelor scrise, pentru fiecare dintre cuvintele date.
- Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 2 018; b) 123 231; c) 17 382 731; d) 101 001 000.
Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul cifrelor scrise, pentru fiecare dintre numerele date.
- Scrieți, cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor, următoarele mulțimi:
 $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $S = \{1, 2, 4, 8, 16\}$; $T = \{10, 20, 30, \dots, 90\}$.
- Prin diagramele din figura 1, sunt reprezentate perechile de mulțimi (A, B) , (C, D) , (E, F) .



a) Scrieți mulțimile date, pentru fiecare caz, prin enumerarea elementelor.

b) Scrieți mulțimile date, precizând proprietatea caracteristică a elementelor.

5. Se consideră mulțimea A , a tuturor râurilor care izvorăsc în România și mulțimea B , a formelor de relief existente în România.

a) Scrieți trei elemente ale mulțimii A ;

b) Scrieți patru elemente ale mulțimii B .

6. Scrieți mulțimea tuturor numerelor de cel mult trei cifre, care se pot forma doar cu cifrele 0 și 1.

7. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici decât 4:
- a) prin enumerarea elementelor; c) prin diagrama Venn-Euler.
b) cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor mulțimii;
8. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3, 5, 8\}$ și $B = \{2, 3, 5, 6, 9\}$. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat sau cu (F), dacă enunțul este fals.
- a) $4 \in A$; ☐ b) $5 \in A$; ☐ c) $7 \notin A$; ☐
d) $2 \in B$; ☐ e) $3^2 \in B$; ☐ f) $2^3 \notin B$; ☐
g) $3 \in A$ și $3 \in B$; ☐ h) $1 \in A$ sau $1 \in B$; ☐ i) $4 \in A$ sau $4 \in B$; ☐
j) $1 \in A$ sau $0 \in \emptyset$; ☐ k) $1 \in A$ și $0 \notin \emptyset$; ☐ l) $9 \in B$ și $9 \notin A$; ☐

1.1. Relații între mulțimi

Aplicăm cunoștințele

1. Despre două mulțimi M și N se spune că sunt *mulțimi egale* dacă au aceleași elemente. Notăm $M = N$. Dacă mulțimile M și N nu sunt egale notăm $M \neq N$.
- a) Scrieți mulțimile de mai jos și precizați mulțimile egale.
 $A = \{x \text{ număr natural și } 3 < x < 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{x \text{ număr par și } x < 5\}$,
 $D = \{x \text{ număr natural și } 4 \leq x \leq 7\}$, $E = \{x \text{ cifră și } x \geq 3\}$.
- b) Mihai susține că „ $A = B$ și $B = C$ ”. Sonia susține că „ $A = B = D$, $B \neq C$ și $C = D$ ”. Cine are dreptate?
- c) Corectați afirmațiile celor doi colegi, astfel încât, fiecare afirmație să fie adevărată.
2. Despre o mulțime A se spune că este *inclusă* într-o mulțime B dacă *toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B* . Se mai spune că A este o *parte* a lui B . Notăm $A \subset B$ (citim „ A este inclus în B ”) sau notăm $B \supset A$ (citim „ B include A ”).
- Ana, Mihai și Sonia se joacă. Fiecare scrie pe tablă câte o mulțime:
 $A = \{x \text{ număr natural și } 3 \cdot x \leq 10\}$, $M = \{x \text{ număr natural, } x \neq 0 \text{ și } x + 3 < 7\}$,
 $S = \{1, 2, 3\}$.
- a) Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
a₁) $M = A$; a₂) $M \subset A$; a₃) $A \subset M$; a₄) $S \subset A$; a₅) $A \subset S$.
- b) Corectați relațiile de mai sus, scrise între două mulțimi, astfel încât, toate să fie adevărate.

Rezumăm cunoștințele

Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.

O mulțime este inclusă într-o altă mulțime, dacă elementele primei mulțimi sunt și elemente ale celei de-a doua mulțimi.

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B .

Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B , scriem $A \subset B$. Se mai spune că B include pe A și scriem $B \supset A$. În acest caz se spune despre A că este o submulțime a lui B , sau că A este o parte a lui B .

Dacă mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B , adică A nu este o submulțime a lui B , notăm $A \not\subset B$ (citim „ A nu este inclus în B ”), sau $B \not\supset A$, (citim „ B nu include pe A ”).

Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi A și notăm: $\emptyset \subset A$

Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

*Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă fiecare din ele este o submulțime a celeilalte mulțimi:
 $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ și } B \subset A$*



3. Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
 $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

a) Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A),
 dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals

$B \subset C$ ☐; $C \subset B$ ☐; $B \subset D$ ☐; $A \subset D$ ☐.

b) Una dintre mulțimile date le conține pe celelalte trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

c) Una dintre mulțimi este conținută de celelalte trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

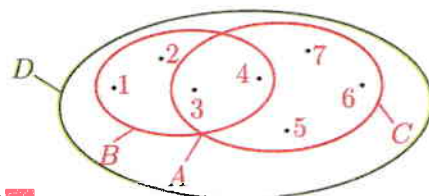
4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$

a) Mulțimea M are o submulțime care nu are nici un element. Care este aceasta?

b) Mulțimea M are o submulțime care are trei elemente. Care este aceasta?

c) Scrieți toate submulțimile lui M care au: • un singur element; • două elemente;

d) Scrieți mulțimea ale cărei elemente sunt toate submulțimile (părțile) lui M .



Ne verificăm



1. a) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{0, 2, 4\}$; $D = \{4, 5, 6, 7\}$;

$E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deci: $A = B = D$.

b) Afirmatia lui Mihai „ $A = B$ și $B = C$ ” este falsă deoarece $B \neq C$. Afirmatia Soniei

„ $A = B = D$, $B \neq C$ și $C = D$ ” nu este adevărată deoarece $C \neq D$. Nici Mihai și nici Sonia nu au dreptate.

c) Afirmatiile corecte sunt: „ $A = B$ și $B \neq C$ ”; „ $A = B = D$, $B \neq C$ și $C \neq D$ ”.

2. a) Pentru a stabili care dintre afirmații sunt adevărate scriem mulțimile numind elementele fiecăreia.
 Prin urmare: $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $M = \{1, 2, 3\}$; $S = \{1, 2, 3\}$. Rezultă: a₁) $M = A$ (F); a₂) $M \subset A$ (A);
 a₃) $A \subset M$ (F); a₄) $S \subset A$ (A); a₅) $A \subset S$ (F).

b) Relații corecte: b₁) $M \neq A$ (A); b₂) $M \subset A$ (A); b₃) $A \not\subset M$ (A); b₄) $S \subset A$ (A); b₅) $A \not\subset S$ (A).

3. a) $B \subset C$ (F); $C \subset B$ (F); $B \subset D$ (A); $A \subset D$ (A).

b) Mulțimea care le conține pe celelalte trei mulțimi este D : $A \subset D$; $B \subset D$ și $C \subset D$.

c) Mulțimea care este conținută de celelalte trei mulțimi este A : $A \subset B$; $A \subset C$ și $A \subset D$.

4. a) Submulțimea lui M care nu are nici un element este mulțimea vidă, adică $\emptyset$;

b) Submulțimea lui M care are trei elemente este M , adică $M \subset M$.

c) Submulțimile lui M care au un singur element sunt: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$. Submulțimile lui M care au două elemente sunt: $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$.

d) Toate submulțimile lui M sunt: $\emptyset$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\}$.



Activități de învățare



1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

a) $A = \{1, 2\}$;

b) $B = \{2, 3, 5\}$;

c) $C = \{a, b, c, d\}$.

2. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\{1, 2\} \subset M$;

b) $M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\subset$, $=$, $\not\subset$ astfel încât afirmațiile să fie adevărate.

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.

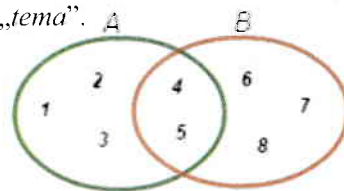
b) Dacă există cel puțin un element al mulțimii A care nu este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A , atunci $A \dots B$.

4. Scrieți o mulțime M ale cărei elemente să fie 4 numere naturale, apoi scrieți toate submulțimile lui M cu câte 3 elemente.
5. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M astfel încât fiecare submulțime să aibă 4 elemente.
6. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:
a) $\{1, 2\} \subset M$; b) $M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7. Scrieți submulțimile cu două elemente ale mulțimii literelor cuvântului „tema”.

8. În figura alăturată sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A și B .



- a) Determinați mulțimea C , a elementele comune mulțimilor A și B .
b) Scrieți submulțimile mulțimii C .

9. Se consideră mulțimea

$M = \{\text{Arad, Brașov, București, Constanța, Craiova, Iași, Timișoara}\}$

- a) Scrieți submulțimea mulțimii M , care conține nume de orașe din Transilvania.
b) Scrieți submulțimea mulțimii M , care conține nume de orașe din Moldova.
c) Scrieți submulțimea mulțimii M , care conține nume de orașe cu cel puțin 1 000 000 de locuitori.
10. La un magazin s-au înregistrat într-o săptămână, din vânzarea unor mărfuri, sumele de bani înscrise în tabelul următor, în lei:

Ziua \ Marfa	dulciuri	flori	jucării	cărți	total
luni	180	60	50	70	...lei
marți	170	30	45	75	...lei
miercuri	160	70	70	85	...lei
joi	170	70	80	70	...lei
vineri	170	60	90	90	...lei
sâmbătă	200	120	100	90	...lei
duminică	160	110	60	70	...lei

- a) Efectuați calculele necesare și determinați sumele totale zilnice, obținute din vânzări.
b) Scrieți mulțimea zilelor în care au avut loc vânzări de cel puțin 400 de lei.
c) Scrieți mulțimea zilelor în care suma obținută din vânzarea dulciurilor este cel puțin jumătate din suma obținută în întreaga zi.

11. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

- a) $\{1, 2, 7\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7, 9\}$; ☐ b) $\{5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$; ☐
c) $\{a, b, c, d\} \supset \{a, d\}$; ☐ d) $\emptyset \subset \{0\}$; ☐

12. Mulțimile $D = \{x; 2 \cdot x - 1; 3 \cdot x + 1\}$ și $E = \{3, 5, 10\}$ sunt egale. Aflați numărul x .

13. Se consideră mulțimea $M = \{12, 22, 32, 42, \dots, 92\}$.

- a) Scrieți numărul elementelor mulțimii M .
b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din patru elemente.
c) Scrieți toate submulțimile formate din opt elemente.

14. Determinați elementul x , pentru fiecare din situațiile următoare; analizați toate cazurile posibile.

- a) $\{x\} \subset \{1, 5\}$;
b) $\{12, x, 18\} \subset \{10, 12, 14, 16, 18\}$;
c) $\{a, b, x, d\} \subset \{x | x \text{ este literă a cuvântului } \textit{abecedar}\}$.

15. Determinați numerele x și y pentru fiecare din situațiile:

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x; 2 \cdot x; 2 \cdot x + 1\}$ și $A = B$;
 b) $C = \{y - 2; y + 3; 2y + 1; 3y\}$, $D = \{3, 8, 11, 15\}$ și $C = D$;

16. Aflați cardinalul mulțimii A , respectiv B știind că:

- a) mulțimea A are exact 8 submulțimi; b) Mulțimea B are exact 16 submulțimi.

17. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

- a) Determinați mulțimile $M \subset A$ astfel încât produsul elementelor mulțimii M să fie cel mult 17.
 b) Determinați submulțimile $\{a, b\}$ ale mulțimii A , astfel încât $(a + b) \in A$.

1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale



Rezolvăm și descoperim

1. Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul natural $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n . De exemplu, 6 este succesorul lui 5 deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea $A = \{x \text{ număr natural și } x < 8\}$ și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A , iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei același joc, dar în locul mulțimii A , ei consideră mulțimea $B = \{x \text{ număr natural și } x \geq 8\}$.

- a) Explicați de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.
 b) Scrieți toate elementele mulțimii A .
 c) Câte elemente are mulțimea A ?
 d) Explicați de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.
 e) Puteți scrie toate elementele mulțimii B ?
 f) Câte elemente are mulțimea B ?

Important

- 1) mulțimile care au un număr bine precizat de elemente, se numesc *mulțimi finite*.
 2) mulțimile cărora nu le putem stabili numărul de elemente, se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Vom scrie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (între acolade scriem elementele mulțimii). Uneori este util să se folosească o scriere mai scurtă $A = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7.

În geometrie admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele dreptei d . Deoarece pe dreapta d sunt un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte.

În jocul lui Vlad cu Mircea nu putem stabili câte elemente are mulțimea B . Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente. Vom scrie $B = \{8, 9, 10, \dots\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Cu șirul numerelor naturale $0, 1, 2, 3, \dots$ putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim *mulțimea numerelor naturale*. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem o nouă mulțime infinită de numere numită *mulțimea numerelor naturale nenule*, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

2. a) Scrieți divizorii numărului 12. b) Scrieți multiplii numărului 3 mai mici decât 17.

3. Fie n un număr natural oarecare. Prin urmare $n \in \mathbb{N}$. Vom nota cu D_n , mulțimea tuturor divizorilor numărului natural n , iar cu M_n , mulțimea tuturor multiplilor lui n .
- scrieți explicit mulțimea D_{12} ;
 - scrieți explicit mulțimea M_3 ;
 - Care dintre mulțimile D_{12} și M_3 este finită și care este infinită?
 - Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ scrieți explicit mulțimea M_p .



Rezumăm cunoștințele

- O mulțime finită este o mulțime care are un număr finit de elemente.
- O mulțime infinită este o mulțime care un număr infinit de elemente.
- Mulțimea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ a numerelor naturale și $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ mulțimea numerelor naturale nenule sunt mulțimi infinite
- mulțimea tuturor divizorilor numărului natural p se notează cu D_p .
- mulțimea tuturor multiplilor numărului natural p se notează cu M_p .



Aplicăm cunoștințele

4. Scrieți explicit mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x \in M_2, x \in M_7 \text{ și } x \leq 50\}$.



Ne verificăm

- a) 3 are proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii A , adică „3 este număr natural și $3 < 8$ ”, deci $3 \in A$. La fel, 8 este număr natural și $8 \not< 8 \Rightarrow 8 \notin B$. b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. c) Mulțimea A are opt elemente. d) 8 număr natural și $8 \geq 8 \Rightarrow 8 \in B$; 3 este număr natural și $3 \not\geq 8 \Rightarrow 3 \notin B$. e) Este evident, nu pot fi scrise toate elementele lui B . f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B .
- a) Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12; b) Multiplii lui 3 sunt: $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, \dots$. Prin urmare multipli lui 3 mai mici decât 17 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15.
- a) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; b) $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$; c) Mulțimea D_{12} este finită (are 6 elemente) și M_3 este infinită. c) $M_p = \{0, p, 2p, 3p, 4p, 5p, \dots\}$.
- Orice element x din mulțimea A are următoarele proprietăți: $x \in \mathbb{N}^*, x \in M_2, x \in M_7$ și $x \leq 50$.
Pe de altă parte: (1) $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \neq 0$; (2) $x \in M_2 \Rightarrow x \in \{0, 4, 6, 8, \dots\}$; (3) $x \in M_7 \Rightarrow x \in \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \dots\}$. Dar din (1), (2), (3) și $x \leq 50$ rezultă $x \in \{14, 28, 42\}$. Deci $A = \{14, 28, 42\}$.



Activități de învățare

- Mulțimea D_n reprezintă mulțimea tuturor divizorilor numărului n . Scrieți, enumerând elementele, mulțimile: $D_2, D_3, D_{14}, D_{30}, D_{47}$.
- Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $D_4 \subset D_{20}$; ☐	b) $D_3 \subset D_{13}$; ☐
c) $D_9 \subset D_6$; ☐	e) $D_{10} \subset \mathbb{N}$; ☐

3. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x \in D_{12}\}$; b) $B = \{x | x \in \mathbb{N}^* \text{ și } (x+1) \in D_{15}\}$.

4. Mulțimea M_n reprezintă mulțimea multiplilor numărului n . Scrieți mulțimile următoare, enumerând elementele acestora.

a) $A = \{x | x \in M_{10} \text{ și } x < 50\}$;

b) $B = \{x | x \in M_5 \text{ și } 8 < x < 25\}$;

c) $C = \{x | x \in M_2 \text{ și } x \text{ este număr impar}\}$;

d) $D = \{x | x \in M_3, x \text{ este număr par și } x < 23\}$.

5. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 | x \text{ și } x | 45\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \in D_6 \text{ sau } x \in D_8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} | x^2 \in M_4 \text{ și } (x+3) | 36\}$.a) Scrieți elementele mulțimilor A, B, C .

b) Determinați numărul elementelor fiecărei mulțimi.

6. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} | 1x4 : 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | (x+8) : x\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N}^* | (x+1) : x\}$.Scrieți elementele mulțimilor A, B, C , apoi alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

Mulțimea elementelor comune celor trei mulțimi conține:

a) două elemente; b) 3 elemente; c) o infinitate de elemente; d) 0 elemente.

1.4. Operații cu mulțimi



Rezolvăm și descoperim

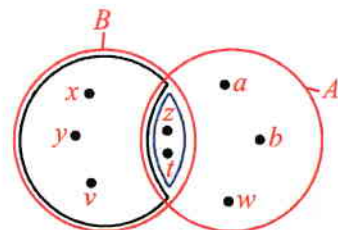
1. Cu ajutorul mulțimilor $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Alexandra definește mulțimile R, I și D astfel:– mulțimea R este mulțimea ale cărei elemente sunt acelea care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B ;– mulțimea I este mulțimea ale cărei elemente sunt elementele comune celor două mulțimi A și B ;– mulțimea D este mulțimea ale cărei elemente sunt acelea care aparțin mulțimii A , dar nu aparțin mulțimii B .a) Scrieți mulțimile R, I și D , punând pentru fiecare mulțime elementele ei între acolade.b) Referindu-se la mulțimile propuse de Alexandra, Sonia scrie trei mulțimi enunțând o proprietate caracteristică fiecăreia dintre mulțimile R, I și D . Cele trei mulțimi scrise de Sonia sunt: $\{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$; $\{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$; $\{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$.Identificați care dintre cele trei mulțimi scrise de Sonia este R , care este I și care este D .c) Mihai definește cele trei mulțimi, la fel ca Alexandra, dar înlocuiește elementele mulțimilor A și B cu alte elemente. El află mulțimile R, I și D , apoi desenează diagrama din figura 1.d) Folosindu-vă de diagrama desenată de Mihai, aflați mulțimile A, B, R, I și D .

Fig. 1



Reținem

Mulțimea R se numește *reuniunea mulțimii A cu mulțimea B* . Se notează $R = A \cup B$ și se citește „mulțimea A reunită cu mulțimea B ”.Mulțimea I se numește *intersecția mulțimii A cu mulțimea B* . Se notează $I = A \cap B$ și se citește „mulțimea A intersectată cu mulțimea B ”.

Mulțimea D se numește *diferența dintre mulțimea A și mulțimea B* . Se notează $A - B$ și se citește „ A minus B ”.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$, calculați: $A \cup \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{N}$, $A - \mathbb{N}$, $\mathbb{N} - A$.



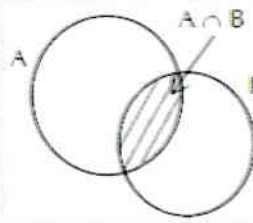
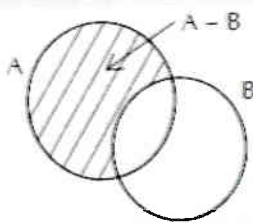
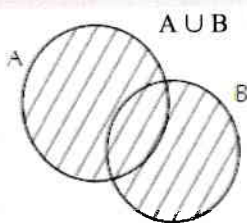
Rezumăm cunoștințele

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Despre două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă, se spune că sunt *mulțimi disjuncte*.

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.



Aplicăm cunoștințele

3. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 5\}$.

Aflați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ și $B - A$.

4. Fie mulțimile A , B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 2.

a) Aflați mulțimile A , B și C .

b) Calculați: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $A - C$; $B - C$; $A \cup B \cup C$;

$A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

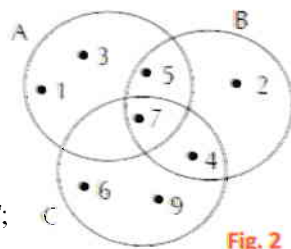


Fig. 2



Ne verificăm

1. a) $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $I = \{5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4\}$

b) Cele trei mulțimi scrise de Sonia sunt: $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$, $R = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ și $I = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$. c) Cele trei mulțimi definite de Mihai sunt: $R = \{a, b, x, y, z, t, v, w\}$, $I = \{t, z\}$ și $D = \{a, b, w\}$. d) Mulțimile sunt: $A = \{a, b, t, w, z\}$, $B = \{x, y, z, t, v\}$, $I = \{t, z\}$, $D = \{a, b, w\}$ și $R = \{a, b, x, y, z, t, v, w\}$

2. Se obține: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{N} = A$, $A - \mathbb{N} = \emptyset$, $\mathbb{N} - A = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$.

3. Se obține: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A - B = \{1, 6\}$ și $B - A = \{3\}$.

4. a) Mulțimile sunt: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ și $C = \{4, 6, 7, 9\}$.

b) Se obține: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A - B = \{1, 3\}$, $A - C = \{1, 3, 5\}$, $B - C = \{2, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A \cap B \cap C = \{7\}$, $(A \cup C) - B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} - \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3, 6, 9\}$.